$= (0-5)\vec{i} - (6-0)\vec{j} + (-2-0)\vec{k}$

$= -5\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & -6 & -2 \end{vmatrix}$$

$= (-6-6)\vec{i} - (-4-5)\vec{j} + (-12+15)\vec{k}$

$= -12\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k} \cdots\cdots\cdots (1)$

$(\vec{a} \cdot \vec{c}) = (2)(0) + (3)(1) + (-1)(-3) = 0 + 3 + 3 = 6$

$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (2)(-2) + (3)(0) + (-1)(5)$

$= -4 + 0 - 5 = -9$

$(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = 6\vec{b} + 9\vec{c}$

$= -12\vec{i} + 30\vec{k} + 9\vec{j} - 27\vec{k}$

$= -12\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k} \qquad (2)$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}}$$

✪7. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ **எனில்** $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\vec{d}$ **என்பதைச் சரிபார்க்க.**

தீர்வு:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-0)\vec{i} - (1-2)\vec{j} + (0-2)\vec{k}$$

$= \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$$\vec{c} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-1)\vec{i} - (4-1)\vec{j} + (2-1)\vec{k}$$

$= \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (1-6)\vec{i} - (1+2)\vec{j} + (-3-1)\vec{k}$

$= -5\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k} \qquad (1)$

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-1) - 1(2-2) + 1(2-0)$$

$= 1(-1) - 1(0) + 1(2)$

$= -1 - 0 + 2 = 1$

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(0-1) - 1(4-1) + 1(2-0)$$

$= 1(-1) - 1(3) + 1(2) = -1 - 3 + 2 = -2$

$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\vec{d} = (-2)\vec{c} - (1)\vec{d}$

$= -2\vec{c} - \vec{d}$

$= -4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} - \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

$= -5\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k} \qquad (2)$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\vec{d}}$$

✪8. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$ **மற்றும்** $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$ **என்ற கோடுகள் வெட்டும் எனக் காட்டி அவை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.**

தீர்வு:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$$

$\Rightarrow \vec{a_1} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ மேலும் $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$$

$\Rightarrow \vec{a_2} = 4\vec{i} - \vec{k}$ மேலும் $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$

$\vec{a_2} - \vec{a_1} = 4\vec{i} - \vec{k} - \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = 3\vec{i} - \vec{j}$

$$[(\vec{a_2} - \vec{a_1})\ \vec{u}\ \vec{v}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ \because R_1 \equiv R_2$$

இங்கு $\vec{u}$ -ம், $\vec{v}$ -ம் இணையற்றவைகள்.

கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகளும் வெட்டும்.

$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0} = \lambda$ என்க.

∴ இக் கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் அமைப்பு $(3\lambda + 1, -\lambda + 1, -1)$ ஆகும்.

$\frac{x-4}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3} = \mu$ என்க.

∴ இக் கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் அமைப்பு $(2\mu + 4, 0, 3\mu - 1)$ ஆகும்.

கோடுகள் வெட்டிக்கொள்வதால்,

$$(3\lambda + 1, -\lambda + 1, -1) = (2\mu + 4, 0, 3\mu - 1)$$

$$-\lambda + 1 = 0 \Rightarrow -\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = 1$$

$\lambda = 1$ எனில் $3\lambda + 1 = 3 + 1 = 4, , -\lambda + 1 = -1 + 1 = 0$

∴ **வெட்டும் புள்ளி** $= \mathbf{(4, 0, -1)}$

✪9. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ **மற்றும்** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-z-1}{1}$ **என்ற கோடுகள் வெட்டும் எனக் காட்டி அவை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.**

தீர்வு:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

$\Rightarrow \vec{a_1} = \vec{i} - \vec{j}$ மேலும் $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-z-1}{1} \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

$\Rightarrow \vec{a_2} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ மேலும் $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{a_2} - \vec{a_1} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} - \vec{i} + \vec{j}$

$= \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$$[(\vec{a_2} - \vec{a_1})\ \vec{u}\ \vec{v}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ \because R_1 \equiv R_3$$

இங்கு $\overrightarrow{u}$ -ம், $\overrightarrow{v}$ -ம் இணையற்றவைகள்.
கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகளும் வெட்டும்.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}=\lambda \text{ என்க.}$$

∴ இக் கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் அமைப்பு $(\lambda+1,-\lambda-1,3\lambda)$ ஆகும்.

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-z-1}{1}=\mu \text{ என்க.}$$

∴ இக் கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் அமைப்பு $(\mu+2,2\mu+1,-\mu-1)$ ஆகும்.
கோடுகள் வெட்டிக்கொள்வதால்,

$$(\lambda+1,-\lambda-1,3\lambda)=(\mu+2,2\mu+1,-\mu-1)$$
$$\lambda+1=\mu+2$$
$$\Rightarrow \lambda-\mu=1 \quad (1)$$
$$-\lambda-1=2\mu+1$$
$$\Rightarrow -\lambda-2\mu=2 \quad (2)$$
$$(1)+(2)\Rightarrow \quad \lambda-\mu-\lambda-2\mu=1+2$$
$$\Rightarrow -3\mu=3\Rightarrow \mu=-1$$

$\mu=-1$ எனில்

$$\mu+2=-1+2=1,$$
$$2\mu+1=-2+1=-1,$$
$$-\mu-1=1-1=0$$

∴ **வெட்டும் புள்ளி $=(1,-1,0)$**

✪10. $(2,-1,-3)$ வழியேச் செல்லக்கூடியதும் $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-4}$ மற்றும் $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{2}$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இணையாக உள்ளதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

வெக்டர் சமன்பாடு

$\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}, \overrightarrow{u}=3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k},$

$\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v}$

$$\boxed{\overrightarrow{r}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}+s(3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k})+t(2\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$(x_1,y_1,z_1)=(2,-1,-3);(l_1,m_1,n_1)=(3,2,-4)$

$(l_2,m_2,n_2)=(2,-3,2)$

தளத்தின் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0$$
$$(x-2)(4-12)-(y+1)(6+8)+(z+3)(-9-4)=0$$
$$(x-2)(-8)-(y+1)(14)+(z+3)(-13)=0$$
$$-8x+16-14y-14-13z-39=0$$
$$-8x-14y-13z-37=0$$
$$\boxed{8x+14y+13z+37=0}$$

✪11. $(1,3,2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ மற்றும் $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இணையாக உள்ளதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

வெக்டர் சமன்பாடு

$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}, \overrightarrow{u}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k},$

$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v}$

$$\boxed{\overrightarrow{r}=\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}+s(2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k})+t(\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$(x_1,y_1,z_1)=(1,3,2);(l_1,m_1,n_1)=(2,-1,3)$

$(l_2,m_2,n_2)=(1,2,2)$

தளத்தின் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$
$$(x-1)(-2-6)-(y-3)(4-3)+(z-2)(4+1)=0$$
$$(x-1)(-8)-(y-3)(1)+(z-2)(5)=0$$
$$-8x+8-y+3+5z-10=0$$
$$-8x-y+5z+1=0$$
$$\boxed{8x+y-5z-1=0}$$

✪12. $(-1,3,2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $x+2y+2z=5$ மற்றும் $3x+y+2z=8$ ஆகிய தளங்களுக்கு செங்குத்தானதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு: வெக்டர் சமன்பாடு

$\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}, \overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k},$

$\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v}$

$$\boxed{\overrightarrow{r}=-\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}+s(\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k})+t(3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$(x_1,y_1,z_1)=(-1,3,2);(l_1,m_1,n_1)=(1,2,2)$

$(l_2,m_2,n_2)=(3,1,2)$

தளத்தின் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$
$$(x+1)(4-2)-(y-3)(2-6)+(z-2)(1-6)=0$$
$$(x+1)(2)-(y-3)(-4)+(z-2)(-5)=0$$
$$2x+2+4y-12-5z+10=0$$
$$\boxed{2x+4y-5z=0}$$

13. $(-1,-2,1)$ **என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $x+2y+4z+7=0$ மற்றும் $2x-y+3z+3=0$ ஆகிய தளங்களுக்கு செங்குத்தானதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.**

தீர்வு: வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{a}=-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}, \vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}. \vec{v}$
$=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v}$

$$\boxed{\vec{r}=-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}+s(\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k})+t(2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$(x_1,y_1,z_1)=(-1,-2,1);(l_1,m_1,n_1)=(1,2,4)$
$(l_2,m_2,n_2)=(2,-1,3)$

தளத்தின் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$(x+1)(6+4)-(y+2)(3-8)+(z-1)(-1-4)=0$$
$$(x+1)(10)-(y+2)(-5)+(z-1)(-5)=0$$
$$10x+10+5y+10-5z+5=0$$
$$10x+5y-5z+25=0$$
$$\boxed{2x+y-z+5=0}$$

14. $(1,2,-2)$ **வழியேச் செல்லக்கூடியதும் $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{-4}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகவும், $2x+3y+3z=8$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் உள்ள தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.**

தீர்வு: வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}, \vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k},$
$\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v}$

$$\boxed{\vec{r}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}+s(3\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k})+t(2\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$(x_1,y_1,z_1)=(1,2,-2);(l_1,m_1,n_1)=(3,-2,-4)$
$(l_2,m_2,n_2)=(2,3,3)$

தளத்தின் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+2 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)(-6+12)-(y-2)(9+8)+(z+2)(9+4)=0$$
$$(x-1)(6)-(y-2)(17)+(z+2)(13)=0$$
$$6x-6-17y+34+13z+26=0$$
$$\boxed{6x-17y+13z+54=0}$$

15. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{3}$ **என்ற கோட்டை உள்ளடக்கியதும், $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையானதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.**

தீர்வு:

வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}, \vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}, \vec{v}$
$=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v}$

$$\boxed{\vec{r}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}+s(2\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k})+t(3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$(x_1,y_1,z_1)=(2,2,1)$
$(l_1,m_1,n_1)=(2,3,3)$
$(l_2,m_2,n_2)=(3,2,1)$

தளத்தின் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-2)(3-6)-(y-2)(2-9)+(z-1)(4-9)=0$$
$$(x-2)(-3)-(y-2)(-7)+(z-1)(-5)=0$$
$$-3x+6+7y-14-5z+5=0$$
$$-3x+7y-5z-3=0$$
$$\boxed{3x-7y+5z+3=0}$$

16. $A(1,-2,3)$ **மற்றும் $B(-1,2,-1)$ என்ற புள்ளிகள் வழியேச் செல்லக்கூடியதும் $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையானதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.**

தீர்வு: வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},$
$\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{r}=(1-t)(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k})+t(-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})+s(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$(x_1,y_1,z_1)=(1,-2,3),(x_2,y_2,z_2)=(-1,2,-1),$
$(l,m,n)=(2,3,4)$

தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1-1 & 2+2 & -1-3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(16+12)-(y+2)(-8+8)+(z-3)(-6-8)=0$$

$$(x-1)(28)-(y+2)(0)+(z-3)(-14)=0$$

$$28x-28+0-14z+42=0$$

$$28x-14z+14=0$$

$$\boxed{2x-z+1=0}$$

✪17. $(1,2,3)$ மற்றும் $(2,3,1)$ என்ற புள்ளிகள் வழியேச் செல்லக்கூடியதும் $3x-2y+4z-5=0$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் அமைந்த தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு: வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k},$

$\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{r}=(1-t)(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})+t(2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k})+s(3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$(x_1,y_1,z_1)=(1,2,3),(x_2,y_2,z_2)=(2,3,1),$$

$$(l,m,n)=(3,-2,4)$$

தளத்தின் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 3-2 & 1-3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)(4-4)-(y-2)(4+6)+(z-3)(-2-3)=0$$

$$(x-1)(0)-(y-2)(10)+(z-3)(-5)=0$$

$$-10y+20-5z+15=0$$

$$-10y-5z+35=0 \Rightarrow \boxed{2y+z-7=0}$$

✪18. $(-1,1,1)$ மற்றும் $(1,-1,1)$ என்ற புள்ளிகள் வழியேச் செல்லக்கூடியதும் $x+2y+2z=5$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் அமைந்த தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க. **M-2007,M-2009,J-2010**

தீர்வு: வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}, \vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{r}=(1-t)(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})+t(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+s(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$(x_1,y_1,z_1)=(-1,1,1);(x_2,y_2,z_2)=(1,-1,1)$$

$$(l,m,n)=(1,2,2)$$

தளத்தின் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 1+1 & -1-1 & 1-1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x+1)(-4-0)-(y-1)(4-0)+(z-1)(4+2)=0$$

$$(x+1)(-4)-(y-1)(4)+(z-1)(6)=0$$

$$-4x-4-4y+4+6z-6=0$$

$$-4x-4y+6z-6=0$$

$$\boxed{2x+2y-3z+3=0}$$

✪19. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-2}$ என்ற கோட்டை உள்ளடக்கியதும் $(-1,1,-1)$ என்ற புள்ளி வழியேச் செல்லக் கூடியதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு: வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},$

$\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{r}=(1-t)(-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})+t(2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})+s(2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$(x_1,y_1,z_1)=(-1,1,-1),(x_2,y_2,z_2)=(2,2,1),$$

$$(l,m,n)=(2,3,-2)$$

தளத்தின் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+1 \\ 2+1 & 2-1 & 1+1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x+1)(-2-6)-(y-1)(-6-4)+(z+1)(9-2)=0$$

$$(x+1)(-8)-(y-1)(-10)+(z+1)(7)=0$$

$$-8x-8+10y-10+7z+7=0$$

$$-8x+10y+7z-11=0$$

$$\boxed{8x-10y-7z+11=0}$$

✪20. $\mathbf{3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+2\vec{k},2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-\vec{k}}$ **மற்றும்** $\mathbf{7\vec{\imath}+\vec{k}}$ **ஆகியவற்றை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் வழியேச் செல்லும் தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.**

தீர்வு:வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{a}=3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+2\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-\vec{k},\ \vec{c}=7\vec{\imath}+\vec{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

$$\boxed{\vec{r}=(1-s-t)(3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+2\vec{k})+s(2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-\vec{k})+t(7\vec{\imath}+\vec{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$(x_1,y_1,z_1)=(3,4,2),(x_2,y_2,z_2)=(2,-2,-1)$$

$$(x_3,y_3,z_3)=(7,0,1)$$

தளத்தின் சமன்பாடு $\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix}x-3 & y-4 & z-2\\ 2-3 & -2-4 & -1-2\\ 7-3 & 0-4 & 1-2\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}x-3 & y-4 & z-2\\ -1 & -6 & -3\\ 4 & -4 & -1\end{vmatrix}=0$$

$$(x-3)(6-12)-(y-4)(1+12)+(z-2)(4+24)=0$$

$$(x-3)(-6)-(y-4)(13)+(z-2)(28)=0$$

$$-6x+18-13y+52+28z-56=0$$

$$-6x-13y+28z+14=0$$

$$\boxed{6x+13y-28z-14=0}$$

✪21. $\mathbf{(2,2,-1),(3,4,2)}$ **மற்றும்** $\mathbf{(7,0,6)}$ **ஆகிய புள்ளிகள் வழியேச் செல்லக்கூடிய தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.** **O-2009**

தீர்வு: வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{a}=2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+2\vec{k},\ \vec{c}=7\vec{\imath}+6\vec{k}$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

$$\boxed{\vec{r}=(1-s-t)(2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k})+s(3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+2\vec{k})+t(7\vec{\imath}+6\vec{k})}$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$(x_1,y_1,z_1)=(2,2,-1),(x_2,y_2,z_2)=(3,4,2)$$

$$(x_3,y_3,z_3)=(7,0,6)$$

தளத்தின் சமன்பாடு $\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix}x-2 & y-2 & z+1\\ 3-2 & 4-2 & 2+1\\ 7-2 & 0-2 & 6+1\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}x-2 & y-2 & z+1\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 7\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

$$(x-2)(14+6)-(y-2)(7-15)+(z+1)(-2-10)=0$$

$$(x-2)(20)-(y-2)(-8)+(z+1)(-12)=0$$

$$20x-40+8y-16-12z-12=0$$

$$20x+8y-12z-68=0$$

$$\boxed{5x+2y-3z-17=0}$$

✪22. வெட்டுத்துண்டு வடிவில் ஒரு தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. **M-2010**

தீர்வு: கார்டீசியன் சமன்பாடு

ஒரு தளத்தின், $x-$ வெட்டுத்துண்டு a,

$y-$ வெட்டுத்துண்டு b, $z-$ வெட்டுத்துண்டு c என்க.

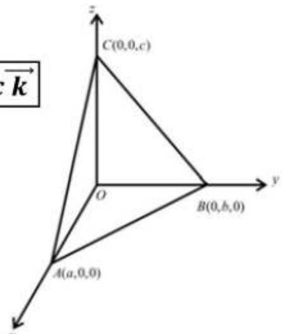
∴ தளமானது $(a,0,0),(0,b,0)$ மற்றும் $(0,0,c)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழியேச் செல்லும்.

$$a\vec{\imath},\ \vec{b}=b\vec{\jmath},\ \vec{c}=c\vec{k}$$

∴ தேவையான வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

$$\boxed{\vec{r}=(1-s-t)a\vec{\imath}+sb\vec{\jmath}+tc\vec{k}}$$



இங்கு$(x_1,y_1,z_1)=(a,0,0)$,

$(x_2,y_2,z_2)=(0,b,0)$,

$(x_3,y_3,z_3)=(0,0,c)$

தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}x-a & y-0 & z-0\\ 0-a & b-0 & 0-0\\ 0-a & 0-0 & c-0\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x-a & y & z\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=0$$

$$(x-a)(bc-0)-y(-ac-0)+z(0+ab)=0$$

$$bcx-abc+acy+abz=0$$

abc ஆல் வகுக்க,

$$\frac{x}{a}-1+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\Rightarrow\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

கலப்பெண்கள்

பிரிவு – அ வினா விடைகள்

வினா எண்	வினா	விடை
1	$x^2 - 6x + k = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $-i + 3$ எனில் k இன் மதிப்பு	10
2	ω என்பது 1 இன் முப்படி மூலம் எனில் $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$ இன் மதிப்பு	9
3	$a = 3 + i$ மற்றும் $z = 2 - 3i$ எனில் உள்ள $az,\ 3az$ மற்றும் $-az$ என்பன ஒரு ஆர்கன் தளத்தில்	ஒரே கோடமைவன
4	$x^2 + y^2 = 1$ எனில் $\frac{1+x+iy}{1+x-iy}$ –ன் மதிப்பு	$x + iy$
5	ஒரு கலப்பெண்ணின் வீச்சு $\frac{\pi}{2}$ எனில் அந்த எண்	முற்றிலும் கற்பனை எண்
6	$a = \cos\alpha - i\sin\alpha,\ b = \cos\beta - i\sin\beta,\ c = \cos\gamma - i\sin\gamma$, எனில் $\frac{a^2c^2-b^2}{abc}$ என்பது	$-2i\sin(\alpha-\beta+\gamma)$
7	$\left[e^{3-\frac{i\pi}{4}}\right]^3$ என்ற கலப்பெண்ணின் மட்டு வீச்சு முறையே	$e^9, -\frac{3\pi}{4}$
8	$z_n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$ எனில் $z_1 z_2 \cdots z_6$ என்பது	-1
9	$2 + i\sqrt{3}$ என்ற கலப்பெண்ணின் மட்டு	$\sqrt{7}$
10	$-i + 2$ என்பது $ax^2 - bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனில் மற்றொரு தீர்வு	$2 + i$
11	$4 - 3i$ மற்றும் $4 + 3i$ என்ற மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடு	$x^2 - 8x + 25 = 0$
12	$i^{13} + i^{14} + i^{15} + i^{16}$ இன் இணை கலப்பெண்	0
13	$ax^2 + bx + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $\frac{1-i}{1+i}$, a யும் b யும் மெய் எனில் (a,b) என்பது	$(1,0)$
14	$-\bar{z}$ மூன்றாம் கால்பகுதியில் அமைந்தால் z அமையும் கால் பகுதி	நான்காம் கால்பகுதி
15	$\pm i\sqrt{7}$ என்ற தீர்வுகளைக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு	$x^2 + 7 = 0$
16	ω என்பது 1 இன் முப்படி மூலம் எனில் $(1-\omega+\omega^2)^4(1+\omega-\omega^2)^4 =$	-16
17	$i + i^{22} + i^{23} + i^{24} + i^{25}$ இன் மதிப்பு என்பது	i
18	$\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]^{100} + \left[\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right]^{100} =$	-1
19	$(2m+3) + i(3n-2)$ என்ற கலபெண்ணின் இணை எண் $(m-5) + i(n+4)$ எனில் (n,m) என்பது	$\left(-\frac{1}{2}, -8\right)$
20	கலப்பெண் $(i^{25})^3$ இன் போலார் வடிவம்	$\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$
21	$\frac{1+e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}} =$	$\cos\theta - i\sin\theta$
22	P ஆனது கலப்பு எண் மாறி z-ஐக் குறிக்கின்றது $\lvert 2z-1\rvert = 2\lvert z\rvert$ எனில் P இன் நியமப்பாதை	$x = \frac{1}{4}$ என்ற நேர்கோடு
23	கலப்பெண் தளத்தில் z_1, z_2, z_3, z_4 என்ற புள்ளிகள் முறையே ஒரு இணைகரத்தின் முனைப்புள்ளிகளாக இருப்பதற்கும் அதன் மறுதலையும் உண்மையாக இருப்பதற்கும் உள்ள நிபந்தனை	$z_1 + z_3 = z_2 + z_4$
24	z ஒரு கலப்பெண்ணைக் குறிப்பதெனில் $rg(z) + arg(\bar{z})$ என்பது	0

வினா எண்	வினா	விடை
25	$x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில் $x^n + \frac{1}{x^n}$ இன் மதிப்பு	$2\cos n\theta$
26	$z_1 = 4 + 5i,\ z_2 = -3 + 2i$ எனில், $\frac{z_1}{z_2}$ என்பது	$-\frac{2}{13} - \frac{23}{13}i$
27	iz என்ற கலப்பெண்ணை ஆதியைப் பொறுத்து $\frac{\pi}{2}$ கோணத்தில் கடிகார எதிர்திசையில் சுழற்றும்போது அந்த எண்ணின் புதிய நிலை	$-z$
28	ω என்பது 1 இன் n ஆம் படி மூலம் எனில்	$\omega^n = 1$
29	$A + iB = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)(a_3 + ib_3)$ எனில் $A^2 + B^2$ இன் மதிப்பு	$(a_1^2 + b_1^2)$ $(a_2^2 + b_2^2)$ $(a_3^2 + b_3^2)$

பிரிவு – ஆ வினா விடைகள்
(ஆறு மதிப்பெண் வினாக்கள்)

✪ 1. $(-7 + 24i)$ –இன் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு: −

$7 + 24i = 9 - 16 + 24i = 3^2 + 24i + (4i)^2$
$= (3 + 4i)^2$

$\Rightarrow \sqrt{-7 + 24i} = \pm(3 + 4i) = 3 + 4i, -3 - 4i.$

✪ 2. $(-8 - 6i)$ –இன் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு:

$-8 - 6i = 1 - 9 - 6i = 1 + (3i)^2 - 6i = (1 - 3i)^2$

$\Rightarrow \sqrt{-8 - 6i} = \pm(1 - 3i) = 1 - 3i, -1 + 3i.$

✪ 3. ஆர்கன் தளத்தில் கலப்பெண்கள் $(10 + 8i)$, $(-2 + 4i)$ மற்றும் $(-11 + 31i)$ அமைக்கும் முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் என நிறுவுக.

தீர்வு:

A, B, C எனும் புள்ளிகள் முறையே $10 + 8i, -2 + 4i, -11 + 31i$ எனும் கலப்பெண்களை ஆர்கன் தளத்தில் குறிக்கட்டும்.

$AB = |(10 + 8i) - (-2 + 4i)|$

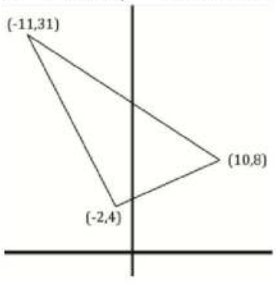
$= |12 + 4i| = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$

$BC = |(-2 + 4i) - (-11 + 31i)|$

$= |9 - 27i| = \sqrt{81 + 729} = \sqrt{810}$

$CA = |(-11 + 31i) - (10 + 8i)|$

$= |-21 + 23i| = \sqrt{441 + 529} = \sqrt{970}$



$AB^2 + BC^2 = CA^2 \Rightarrow \angle B = 90$

எனவே ΔABC ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும்.

செய்து பார்க்க:

1) $3 + 3i, -3 - 3i, -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i$ எனும் கலப்பெண்கள் ஒரு சமபக்க முகக்கோணத்தை ஆர்கன் தளத்தில் உருவாக்கும் என்று காட்டுக.

2) $2i, 1 + i, 4 + 4i$, மற்றும் $3 + 5i$ எனும் கலப்பெண்கள் ஒரு செவ்வகத்தை ஆர்கன் தளத்தில் ஒரு செவ்வகததை உருவாக்கும் என்று காட்டுக.

3) கலப்பெண்கள் $7 + 9i, -3 + 7i, 3 + 3i$ எனும் கலப்பெண்கள் ஆர்கன் தளத்தில் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

4) $7 + 5i, 5 + 2i, 4 + 7i$ மற்றும் $2 + 4i$ எனும் கலப்பெண்கள் ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

✪ 4. P என்னும் புள்ளி கலப்பு எண் மாறி zஐக் குறித்தால் Pஇன் நியமப்பாதையை $|z - 5i| = |z + 5i|$ என்ற கட்டுபாட்டுக்கு உட்பட்டு காண்க.

தீர்வு:

$z = x + iy$ என்க.

$|z - 5i| = |z + 5i|$

$|x + iy - 5i| = |x + iy + 5i|$

$|x + i(y - 5)| = |x + i(y + 5)|$

$\sqrt{x^2 + (y - 5)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 5)^2}$

வர்க்கப்படுத்த,

$x^2 + y^2 - 10y + 25 = x^2 + y^2 + 10y + 25$

$\Rightarrow -20y = 0 \Rightarrow y = 0$

Pஇன் நியமப்பாதை $y = 0$

செய்து பார்க்க:

❖ P என்னும் புள்ளி கலப்பு எண் மாறி zஐக் குறித்தால் Pஇன் நியமப்பாதையை $|z - 3i| = |z + 3i|$ என்ற கட்டுபாட்டுக்கு உட்பட்டு காண்க.

❖ P என்னும் புள்ளி கலப்பு எண் மாறி zஐக் குறித்தால் Pஇன் நியமப்பாதையை $|2z-3|=2$ என்ற கட்டுபாட்டுக்கு உட்பட்டு காண்க.

✪ 5. $3+i$ ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $x^4-8x^3+24x^2-32x+20=0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்.

தீர்வு:

$3+i$ ஒரு தீர்வு. எனவே $3-i$ மற்றொரு தீர்வு.

மூலங்களின் கூடுதல் $=3+i+3-i=6.$

மூலங்களின் பெருக்கம் $=(3+i)(3-i)=9+1=10$

$x^2-6x+10$ என்பது ஓர் காரணி.

$$x^4-8x^3+24x^2-32x+20$$
$$=(x^2-6x+10)(x^2+px+2)$$

x கெழுவை ஒப்பிட $10p-12=-32 \Rightarrow p=-2.$

x^2-2x+2 மற்றொரு காணியாகிறது

$$x^2-2x+2=0$$

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

எனவே மூலங்கள் $3\pm i,\ 1\pm i.$

செய்து பார்க்க:

❖ $1+2i$ ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர். **J-2009**

❖ $2-i$ ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $6x^4-25x^3+32x^2+3x-10=0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்.

❖ $2+\sqrt{3}i$ ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $x^4-4x^2+8x+35=0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்.

❖ $1-i$ ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $x^3-4x^2+6x-4=0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர். **J-2007**

✪ 6. n என்பது மிகை முழு எண் எனில் $(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு:

$z=1+i$ என்க.

$$r=|z|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}=(2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{1}=1 \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$z=1+i=(2)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$[1+i]^n=\left[(2)^{\frac{1}{2}}\right]^n\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]^n$$
$$=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \qquad (1)$$

$[1-i]^n$ஐ கணக்கிட iக்கு பதில் $-i$ஐ பிரதியிட.

$$(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \qquad (2)$$

$$(1)+(2)\Rightarrow (1+i)^n+(1-i)^n=2\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$$
$$=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$$

செய்து பார்க்க:

n என்பது மிகை முழு எண் எனில் பின்வருபனவற்றை நிறுவுக.

(1) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n+\left(1-i\sqrt{3}\right)^n=2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$

(2) $\left(\sqrt{3}+i\right)^n+\left(\sqrt{3}-i\right)^n=2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{6}$

✪ 7. n என்பது மிகை முழு எண் எனில் $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n=2^{n+1}\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு:

$$1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+i2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}^n$$
$$=2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right\} \quad \cdots(1)$$

$(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n$ஐ கணக்கிட iக்கு பதில் $-i$ ஐ பிரதியிட.

$$(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n=2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\frac{n\theta}{2}-i\sin\frac{n\theta}{2}\right\} \quad \cdots(2)$$

$$(1)+(2)\Rightarrow (1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n$$
$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(2\cos\frac{n\theta}{2}\right)$$
$$=2^{n+1}\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

✪8. சுருக்குக: $\dfrac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3}{(\sin\beta+i\cos\beta)^4}$

தீர்வு:

$$\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3}{(\sin\beta+i\cos\beta)^4}=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3}{(i\cos\beta-i^2\sin\beta)^4}$$
$$=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3}{i^4(\cos\beta-i\sin\beta)^4}$$
$$=\frac{(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha)}{(\cos 4\beta-i\sin 4\beta)}$$
$$=(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha)(\cos 4\beta+i\sin 4\beta)$$
$$=\cos(3\alpha+4\beta)+i\sin(3\alpha+4\beta)$$

✪ 9. சுருக்குக: $\dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5}$

தீர்வு:

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(-i^2\sin\theta + i\cos\theta)^5}$$
$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{i^5(\cos\theta - i\sin\theta)^5}$$
$$= -i(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) \times (\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$
$$= -i(\cos 9\theta + i\sin 9\theta)$$
$$= \sin 9\theta - i\cos 9\theta$$

✪10. $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\theta$ எனில்

$(i)\ x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos n\theta \quad (ii)\ x^n - \dfrac{1}{x^n} = 2i\sin n\theta$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு:

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta \Rightarrow x = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$\therefore \frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta$$
$$x^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{1}{x^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$(1) + (2) \Rightarrow x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$$
$$(1) - (2) \Rightarrow x^n - \frac{1}{x^n} = 2i\sin n\theta$$

✪11. $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\theta ; y + \dfrac{1}{y} = 2\cos\phi$ எனில்

$(i)\ \dfrac{x^m}{y^n} + \dfrac{y^n}{x^m} = 2\cos(m\theta - n\phi)$

$(ii)\ \dfrac{x^m}{y^n} - \dfrac{y^n}{x^m} = 2i\sin(m\theta - n\phi)$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு:

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta \Rightarrow x = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$y + \frac{1}{y} = 2\cos\phi \Rightarrow y = \cos\phi + i\sin\phi$$
$$x^m = \cos m\theta + i\sin m\theta$$
$$y^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$$
$$\frac{x^m}{y^n} = \frac{\cos m\theta + i\sin m\theta}{\cos n\phi + i\sin n\phi}$$
$$= \cos(m\theta - n\phi) + i\sin(m\theta - n\phi) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{y^n}{x^m} = \frac{1}{\frac{x^m}{y^n}} = \cos(m\theta - n\phi) - i\sin(m\theta - n\phi) \quad \cdots\cdots (2)$$
$$(1) + (2) \Rightarrow \frac{x^m}{y^n} + \frac{y^n}{x^m} = 2\cos(m\theta - n\phi)$$
$$(1) - (2) \Rightarrow \frac{x^m}{y^n} - \frac{y^n}{x^m} = 2i\sin(m\theta - n\phi)$$

✪12. $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\alpha ; y + \dfrac{1}{y} = 2\cos\beta$ எனில்

$x^m y^n + \dfrac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\alpha + n\beta)$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு:

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha \Rightarrow x = \cos\alpha + i\sin\alpha$$
$$y + \frac{1}{y} = 2\cos\beta \Rightarrow y = \cos\beta + i\sin\beta$$
$$x^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha$$
$$y^n = \cos n\beta + i\sin n\beta$$
$$x^m y^n = (\cos m\alpha + i\sin m\alpha)(\cos n\beta + i\sin n\beta)$$
$$= \cos(m\alpha + n\beta) + i\sin(m\alpha + n\beta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{1}{x^m y^n} = \cos(m\alpha + n\beta) - i\sin(m\alpha + n\beta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$(1) + (2) \Rightarrow x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = \cos(m\alpha + n\beta)$$

✪13. z_1, z_2 என்ற இரு கலப்பெண்களுக்கு

(i) $|z_1 . z_2| = |z_1||z_2|$ (ii) $\arg(z_1 . z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ என நிறுவுக. $(Oct.-2007, June-2008)$

தீர்வு:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$|z_1| = r_1$, $\arg z_1 = \theta_1$ மற்றும்

$|z_2| = r_2$, $\arg z_2 = \theta_2$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\, i\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1 i\sin\theta_2)$$
$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$$
$$= r_1 r_2[(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$
$$|z_1 . z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|,$$
$$\arg(z_1 . z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

செய்து பார்க்க:

z_1 , z_2 என்ற இரு கலப்பெண்களுக்கு

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ (ii) } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg\ z_1 - \arg\ z_2$$

என நிறுவுக.

✪14. முக்கோணச் சமனிலி

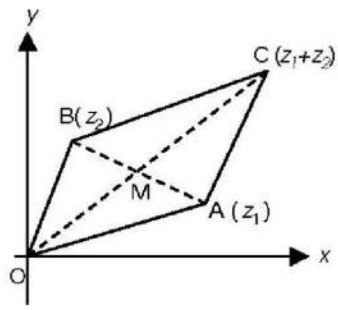
இரு கலப்பெண்களின் கூடுதலின் மட்டு அவ்விரு எண்களின் மட்டுகளின் கூடுதலுக்குக் குறைவாகவே அல்லது சமமாகவோ இருக்கும் அதாவது

$|\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}| \leq |\boldsymbol{z_1}| + |\boldsymbol{z_2}|$.

ஆர்கன் தளத்தில் z_1 மற்றும் z_2 என்ற இரு கலப்பெண்களை A மற்றும் B புள்ளிகளால் குறிக்க. OACB என்ற இணைகரத்தை நிறைவு செய்க. இங்கு C என்பது $z_1 + z_2$ என்ற கலப்பெண்ணை குறிக்கிறது.

$OA = |z_1|$, $OB = |z_2|$. மற்றும் $OC = |z_1 + z_2|$

ஒரு முக்கேணத்தில் ஏதேனும் இரு பக்க நீளங்களின் கூடுதல் மூன்றாவது பக்க நீளத்தை விட பெரியது



ΔOACயிலிருந்து

$$\text{OA} + \text{AC} > OC$$

$$|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2| \cdots\cdots\cdots (1)$$

மேலும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன எனில்

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1), (2) இலிருந்து $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

✪15. தீர்க்க : $x^4 + 4 = 0$

தீர்வு:

$$x^4 = -4 = 4[-1] = 4[\cos\pi] = 4[\cos\pi + i\sin\pi]$$

$$x^4 = 4[\cos\pi + i\sin\pi] \Rightarrow x = 4^{\frac{1}{4}}[\cos\pi + i\sin\pi]^{\frac{1}{4}}$$

$$x = (2^2)^{\frac{1}{4}}[\cos(2k\pi + \pi) + i\sin(2k\pi + \pi)]^{\frac{1}{4}}$$

$$x = \sqrt{2}\left[\cos\frac{1}{4}(2k\pi + \pi) + i\sin\frac{1}{4}(2k\pi + \pi)\right] \quad ;$$

$$k = 0,1,2,3$$

$$x = \sqrt{2}cis\ \frac{\pi}{4}, \sqrt{2}cis\ \frac{3\pi}{4}, \sqrt{2}cis\ \frac{5\pi}{4}, \sqrt{2}cis\ \frac{7\pi}{4}$$

பகுமுறை வடிவக்கணிதம்

பிரிவு –அ வினா விடைகள்

வினா எண்	வினா	விடை
1	$y^2 - 2y + 8x - 23 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் அச்சு	$y = 1$
2	$16x^2 - 3y^2 - 32x - 12y - 44 = 0$ என்பது	ஒரு அதிபரவளையம்
3	$4x + 2y = c$ என்ற கோடு $y2 = 16x$ என்ற பரவளையத்தின் தொடுகோடு எனில் c இன் மதிப்பு	-4
4	$y2 = 8x$ என்ற பரவளையத்தில் $t_1 = t$ மற்றும் $t_2 = 3t$ என்ற புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி	$(6t^2, 8t)$
5	$y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் செவ்வகலத்தின் நீளம்	4
6	$y^2 = x + 4$ என்ற பரவளையத்தின் இயக்குவரையின் சமன்பாடு	$x = -\frac{17}{4}$
7	$(2, -3)$ என்ற முனை. $x = 4$ என்ற இயக்குவரையைக் கொண்ட பரவளையத்தின் செவ்வகல நீளம்	8
8	$x^2 = 16y$ என்ற பரவளையத்தின் குவியம்	(0,4)
9	$x^2 = 8y - 1$ என்ற பரவளையத்தின் முனை	$\left(0, \frac{1}{8}\right)$

வினா எண்	வினா	விடை
10	$2x + 3y + 9 = 0$ என்ற கோடு $y^2 = 8x$ என்ற பரவளையத்தைத் தொடும் புள்ளி	$\left(\frac{9}{2}, -6\right)$
11	$y^2 = 12x$ என்ற பரவளையத்தின் குவிநாணின் இறுதிப்புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி அமையும் கோடு	$x + 3 = 0$
12	$(-4, 4)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 16x$க்கு வரையப்படும் இரு தொடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம்	90^0
13	$9x^2 + 5y^2 - 54x - 40y + 116 = 0$ என்ற கூம்பு வளைவின் மையத் தொலைத்தகவு (e)இன் மதிப்பு	$\frac{2}{3}$
14	$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் அரை-நெட்டச்சு மற்றும் அரை-குற்றச்சு நீளங்கள்	13,12
15	$9x^2 + 5y^2 = 180$ என்ற நீள்வட்டத்தின் குவியங்களுக்கிடையே உள்ள தொலைவு	8
16	ஒரு நீள் வட்டத்தின் நெட்டச்சு மற்றும் அதன் அரை குற்றச்சுகளின் நீளங்கள் 8, 2 முறையே அதன் சமன்பாடுகள் $y - 6 = 0$ மற்றும் $x + 4 = 0$ எனில். நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு	$\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1$
17	$2x - y + c = 0$ என்ற நேர்க்கோடு $4x^2 + 8y^2 = 32$ என்ற நீள்வட்டத்தின் தொடுகோடு எனில் cஇன் மதிப்பு	± 6
18	$4x^2 + 9y^2 = 36$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து $(\sqrt{5}, 0)$ மற்றும் $(-\sqrt{5}, 0)$ என்ற புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவுகளின் கூடுதல்	6
19	$9x^2 + 16y^2 = 144$ என்ற கூம்பு வளைவின் இயக்கு வட்டத்தின் ஆரம்	5
20	$16x^2 + 25y^2 = 400$ என்ற வளைவரையின் குவியத்திலிருந்து ஒரு தொடுகோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடியின் நியமப்பாதை	$x^2 + y^2 = 25$
21	$12y2 - 4x2 - 24x + 48y - 127 = 0$ என்ற அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு	2
22	செவ்வகலத்தின் நீளம். துணையச்சின் நீளத்தில் பாதி எனக் கொண்டுள்ள அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
23	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$என்ற அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள எதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து குவியத்திற்கு இடையேயுள்ள தொலைவுகளின் வித்தியாசம் 24 மற்றும் மையத் தொலைத்தகவு 2 எனில் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு	$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{432} = 1$
24	$x^2 - 4(y - 3)^2 = 16$ என்ற அதிபரவளையத்தின் இயக்குவரை	$x = \pm \frac{8}{\sqrt{5}}$
25	$4x2 - y2 = 36$ க்கு $5x - 2y + 4k = 0$ என்ற கோடு ஒரு தொடுகோடு எனில். k இன் மதிப்பு	$\frac{9}{4}$
26	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு $(2, 1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண்	$9x - 8y - 72 = 0$
27	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளுக் கிடையேயுள்ள கோணம்	$2\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$
28	$36y^2 - 25x^2 + 900 = 0$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகள்	$y = \pm \frac{5}{6}x$
29	$(8, 0)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்து தூரங்களின் பெருக்கல் பலன்	$\frac{576}{25}$

வினா எண்	வினா	விடை
30	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் செங்குத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் நியமப்பாதை	$x^2+y^2=7$
31	$x+2y-5=0, 2x-y+5=0$ என்ற தொலைத் தொடுகோடுகளைக் கொண்ட அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு	$\sqrt{2}$
32	$xy=8$ என்ற செவ்வக பரவளையத்தின் அரை குறுக்கச்சின் நீளம்	4
33	$xy=c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் தொலைத்தொடுகோடுகள்	$x=0, y=0$
34	$xy=16$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் முனையின் ஆயத் தொலைவுகள்	$(4,4),(-4,-4)$
35	$xy=18$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் ஒரு குவியம்	$(6,6)$
36	$xy=32$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் செவ்வகலத்தின் நீளம்	16
37	$xy=72$ என்ற திட்ட செவ்வக அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடு அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளுடன் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு	144
38	$xy=9$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் மீதுள் $\left(6,\frac{3}{2}\right)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து. வளைவரையை மீண்டும் சந்திக்கும் புள்ளி	$\left(-\frac{3}{8},-24\right)$

பிரிவு –இ வினா விடைகள்

நீள்வட்டம்:

$$\text{மையம்} = (h,k) = \left(-\frac{x \text{ இன் கெழு}}{2\times x^2 \text{ இன் கெழு}}, -\frac{y \text{ இன் கெழு}}{2\times y^2 \text{ இன் கெழு}}\right)$$

$L = x^2$ இன் கெழு, y^2 இன் கெழு இல் பெரியது

$S = x^2$ இன் கெழு, y^2 இன் கெழு இல் சிறியது

$$e = \text{மையத் தொலைத்தகவு} = \sqrt{\frac{L-S}{L}}$$

பொது வடிவம்

$$\boldsymbol{Ax^2+By^2+2gx+2fy+c=0}$$
$$\boldsymbol{A(x-h)^2+B(y-k)^2=Ah^2+Bk^2-c}$$
$$\boxed{\boldsymbol{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}}$$

முக்கிய குறிப்புகள்

x^2 இன் கெழு, y^2 இன் கெழுவைவிடச் சிறியது எனில்

மையத்தின் x ஆயத்தொலைவுடன் ae யினைக் கூட்ட, குவியம் F_1 ம், கழிக்க மற்றொரு குவியம் F_2 ம் கிடைக்கும். மையத்தின் x ஆயத்தொலைவுடன் a யினைக் கூட்ட முனை A ம், கழிக்க மற்றொரு முனை A' ம் கிடைக்கும்.

x^2 இன் கெழு, y^2 இன் கெழுவைவிடச் பெரியது எனில்

மையத்தின் y ஆயத்தொலைவுடன் be யினைக் கூட்ட, குவியம் F_1 ம், கழிக்க மற்றொரு குவியம் F_2 ம் கிடைக்கும். மையத்தின் y ஆயத்தொலைவுடன் b யினைக் கூட்ட முனை A ம், கழிக்க மற்றொரு முனை A' ம் கிடைக்கும்.

1. $x^2+4y^2-8x-16y-68=0$ என்ற நீள்வட்டத் தின் மையத்தொலைவு விகிதம், மையம், குவியங்கள், முனைகள் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப்படத்தை வரைக.

$$x^2+4y^2-8x-16y-68=0$$

$A=S=x^2$ இன் கெழு=**1**, $B=L=y^2$ இன் கெழு=**4**

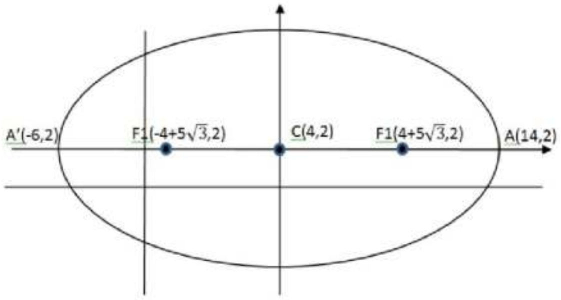
x இன் கெழு $=-8$, y இன் கெழு $=-16$, $c=-68$

$$\text{மையம்} = (h,k) = \left(-\frac{x \text{ இன் கெழு}}{2\times x^2 \text{ இன் கெழு}}, -\frac{y \text{ இன் கெழு}}{2\times y^2 \text{ இன் கெழு}}\right)$$
$$=\left(-\frac{-8}{2},-\frac{-16}{8}\right)=(4,2)$$

$$e = \text{மையத் தொலைத்தகவு} = \sqrt{\frac{L-S}{L}}=\sqrt{\frac{4-1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2+4y^2-8x-16y-68=0$$
$$\boldsymbol{A(x-h)^2+B(y-k)^2=Ah^2+Bk^2-c}$$
$$1(x-4)^2+4(y-2)^2=(1)(4)^2+(4)(2)^2+68$$
$$=16+16+68=100$$
$$\boxed{\frac{(x-4)^2}{100}+\frac{(y-2)^2}{25}=1}$$
$$a=10, b=5, e==\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow ae=10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=5\sqrt{3}$$

	x,y ஐப் பொறுத்து
மையம்	$C(4,2)$
குவியங்கள்	$F_1(4+5\sqrt{3},2)$
	$F_2(4-5\sqrt{3},2)$
முனைகள்	$A(4+10,2)=A(14,2)$
	$A'=(4-10,2)=A'(-6,2)$
மையத்தொலைவு விகிதம்	$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$



செய்து பார்க்க:

$x^2+25y^2-18x-100y-116=0$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மையத்தொலைவு விகிதம், மையம், குவியங்கள், முனைகள் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப்படத்தை வரைக.

2. $36x^2+4y^2-72x+32y-44=0$ என்ற நீள் வட்டத்தின் மையத்தொலைவு விகிதம், மையம், குவியங்கள், முனைகள் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப்படத்தை வரைக.

$$36x^2+4y^2-72x+32y-44=0$$

$$A=L=x^2 \text{ இன் கெழு}=36, B=S=y^2 \text{ இன் கெழு}=4$$

$$x \text{ இன் கெழு}=-72, y \text{ இன் கெழு}=32, c=-44$$

$$\text{மையம்}=(h,k)=\left(-\frac{x \text{ இன் கெழு}}{2\times x^2 \text{ இன் கெழு}},-\frac{y \text{ இன் கெழு}}{2\times y^2 \text{ இன் கெழு}}\right)$$

$$=\left(-\frac{-72}{72},-\frac{32}{8}\right)=(1,-4)$$

$$e=\text{மையத் தொலைத்தகவு}=\sqrt{\frac{L-S}{L}}=\sqrt{\frac{36-4}{36}}$$

$$=\frac{\sqrt{32}}{6}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$36x^2+4y^2-72x+32y-44=0$$

$$\boldsymbol{A(x-h)^2+B(y-k)^2=Ah^2+Bk^2-c}$$

$$36(x-1)^2+4(y+4)^2=(36)(1)^2+(4)(-4)^2+44$$

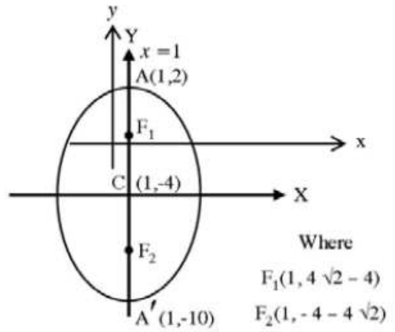
$$=36+64+44=144$$

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{36}=1}$$

$$a=2, b=6$$

$$be=6\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=4\sqrt{2}$$

	x,y ஐப் பொறுத்து $a<b$
மையம்	$C(1,-4)$
குவியங்கள்	$F_1(1,-4+4\sqrt{2})$
	$F_2(1,-4-4\sqrt{2})$
முனைகள்	$A(1,-4+6)=A(1,2)$
	$A'(1,-4-6)=A'(1,-10)$
மையத்தொலைவு விகிதம்	$e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$



செய்து பார்க்க:

$16x^2+9y^2+32x-36y=92$ என்ற நீள்வட்டத் தின் மையத்தொலைவு விகிதம், மையம், குவியங்கள், முனைகள் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப்படத்தை வரைக.

அதிபரவளையம்:

$$\boldsymbol{u(x,y)=Ax^2-By^2+2gx+2fy+c=0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\Rightarrow 2xA+2g=0\Rightarrow x=-\frac{g}{A}=-\frac{x \text{ இன் கெழு}}{2\times x^2 \text{ இன் கெழு}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0\Rightarrow -2yB+2f=0\Rightarrow y=\frac{f}{B}=-\frac{y \text{ இன் கெழு}}{2\times y^2 \text{ இன் கெழு}}$$

$$\text{மையம்}=(h,k)=\left(-\frac{x \text{ இன் கெழு}}{2\times x^2 \text{ இன் கெழு}},-\frac{y \text{ இன் கெழு}}{2\times y^2 \text{ இன் கெழு}}\right)$$

பொது வடிவம்

$$\boldsymbol{Ax^2-By^2+gx+fy+c=0}$$

$$\boldsymbol{A(x-h)^2-B(y-k)^2=Ah^2-Bk^2-c}$$

$$e=\text{மையத் தொலைத்தகவு}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$$

	x,y ஐப் பொறுத்து	
	$c<0$	$c>0$
மையம்	$C(h,k)$	$C(h,k)$
குவியங்கள்	$F_1(h+ae,k)$	$F_1(h,k+ae)$
	$F_2(h-ae,k)$	$F_2(h,k-ae)$
முனைகள்	$A(h+a,k)$	$A(h,k+a)$
	$A'(h-a,k)$	$A'(h,k-a)$
மையத்தொலைவு விகிதம்	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$

3. $x^2-3y^2+6x+6y+18=0$ என்ற அதிபரவளை யத்தின் மையத்தொலைவு விகிதம், மையம், குவியங்கள், முனைகள் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப்படத்தை வரைக.

$$x^2-3y^2+6x+6y+18=0$$

$$A=x^2 \text{ இன் கெழு}=1, -B=y^2 \text{ இன் கெழு}=-3$$

$$x \text{ இன் கெழு}=6, y \text{ இன் கெழு}=6, c=18>0$$

$$\text{மையம்}=(h,k)=\left(-\frac{x \text{ இன் கெழு}}{2\times x^2 \text{ இன் கெழு}},-\frac{y \text{ இன் கெழு}}{2\times y^2 \text{ இன் கெழு}}\right)$$

$$=\left(-\frac{6}{2},-\frac{6}{-6}\right)=(-3,1)$$

$$\boldsymbol{A(x-h)^2-B(y-k)^2=Ah^2-Bk^2-c}$$

$$1(x+3)^2-3(y-1)^2=(1)(-3)^2-(3)(1)^2-18$$
$$=9-3-18=-12$$

-12 ஆல் வகுக்க

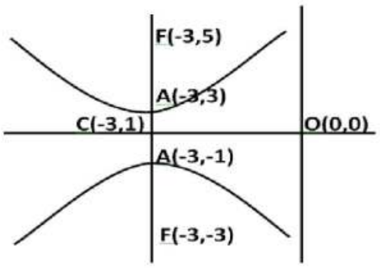
$$\frac{(x+3)^2}{-12}-\frac{3(y-1)^2}{-12}=1 \ or \ \boxed{\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+3)^2}{12}=1}$$

$$a^2=4;b^2=12\Rightarrow a=2,b=2\sqrt{3}$$

$$e=\text{மையத் தொலைத்தகவு}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{4+12}{4}}=\frac{4}{2}=2$$

$$ae=(2)(2)=4$$

		x, y ஐப் பொறுத்து
		$c>0$
மையம்	$C(h,k)$	$C(-3,1)$
குவியங்கள்	$F_1(h,k+ae)$	$F_1(-3,1+4)=(-3,5)$
	$F_2(h,k-ae)$	$F_2(-3,1-4)=(-3,-3)$
முனைகள்	$A(h,k+a)$	$A(-3,1+2)=(-3,3)$
	$A'(h,k-a)$	$A'(-3,1-2)=(-3,-1)$
மையத்தொலைவு விகிதம்	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$	2



செய்து பார்க்க:

$9x^2-16y^2+36x+32y+164=0$ **என்ற அதிபரவளையத்தின் மையத்தொலைவு விகிதம், மையம், குவியங்கள், முனைகள் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப்படத்தை வரைக.**

4. $x^2-4y^2+6x+16y-11=0$ **என்ற அதிபரவளையத்தின் மையத்தொலைவு விகிதம், மையம், குவியங்கள், முனைகள் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப்படத்தை வரைக.** **M-2010**

$$x^2-4y^2+6x+16y-11=0$$
$$A=x^2 \text{ இன் கெழு}=1, -B=y^2 \text{ இன் கெழு}=-4$$
$$x \text{ இன் கெழு}=6, y \text{ இன் கெழு}=16, c=-11<0$$

$$\text{மையம்}=(h,k)=\left(-\frac{x \text{ இன் கெழு}}{2\times x^2 \text{ இன் கெழு}},-\frac{y \text{ இன் கெழு}}{2\times y^2 \text{ இன் கெழு}}\right)$$

$$=\left(-\frac{6}{2},-\frac{16}{-8}\right)=(-3,2)$$

$$\boldsymbol{A(x-h)^2-B(y-k)^2=Ah^2-Bk^2-c}$$

$$1(x+3)^2-4(y-2)^2=(1)(-3)^2-(4)(2)^2+11$$
$$=9-16+11=4$$

4 ஆல் வகுக்க

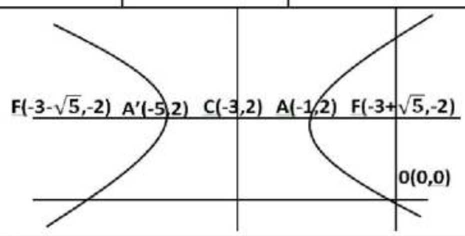
$$\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{4(y-2)^2}{4}=1 \ or \ \boxed{\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{1}=1}$$

$$a^2=4;b^2=1\Rightarrow a=2,b=1$$

$$e=\text{மையத் தொலைத்தகவு}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{4+1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$ae=(2)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\sqrt{5}$$

		x, y ஐப் பொறுத்து
		$c<0$
மையம்	$C(h,k)$	$C(-3,2)$
குவியங்கள்	$F_1(h+ae,k)$	$(-3+\sqrt{5},2)$
	$F_2(h-ae,k)$	$(-3-\sqrt{5},2)$
முனைகள்	$A(h+a,k)$	$A(-3+2,2)=(-1,2)$
	$A'(h-a,k)$	$A'(-3-2,2)=(-5,2)$
மையத்தொலைவு விகிதம்	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$



செய்து பார்க்க:

$9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$ **என்ற அதிபரவளையத்தின் மையத்தொலைவு விகிதம், மையம், குவியங்கள், முனைகள் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப்படத்தை வரைக.**

பரவளையம்:

சமன்பாடு	$x^2=4ay$	$y^2=4ax$
அச்சு	$x=0$	$y=0$
முனை	$(0,0)$	$(0,0)$
குவியம்	$(0,a)$	$(a,0)$
Z	$(0,-a)$	$(-a,0)$
செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு	$y=a$	$x=a$
செவ்வகலத்தின் நீளம்	$4a$	$4a$
இயக்குவரையின் சமன்பாடு	$y=-a$	$x=-a$

வகை1: பொது வடிவம் : $\boldsymbol{x^2+2gx+2fy+c=0}$

$$a=-\frac{y \text{ இன் கெழு}}{4}$$

$$\text{முனையின் } x \text{ ஆயத்தொலவு}=h=-\frac{x \text{ இன் கெழு}}{2}$$

$x = h$ என $x^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ பிரதியிட, கிடைக்கும் y ஆனது முனையின் y ஆயத்தொலைவு k ஆகும்.

முனை $= (h, k)$

திட்ட வடிவம்: $(x-h)^2 = -2f(y-k)$

முக்கிய குறிப்பு

முனையின் x ஆயத்தொலைவுடன் a யினைக் கூட்ட, குவியம் F ம், a யினைக் கழிக்க Z ம் கிடைக்கும்.

5. $x^2 - 6x - 12y - 3 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் அச்சு, முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப் படத்தை வரைக.

தீர்வு:

$$x^2 - 6x - 12y - 3 = 0$$

$$a = -\frac{y \text{ இன் கெழு}}{4} = -\frac{-12}{4} = 3$$

முனையின் x ஆயத்தொலவு $= h = -\frac{x \text{ இன் கெழு}}{2}$

$$= -\frac{-6}{2} = 3$$

$x = 3$ என $x^2 - 6x - 12y - 3 = 0$ பிரதியிட,

$$3^2 - 6(3) - 12y - 3 = 0$$

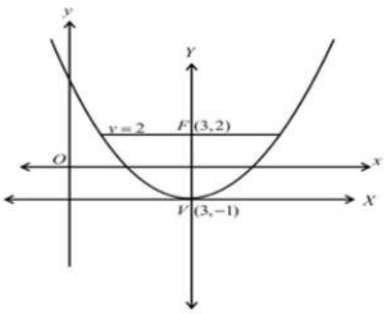
$$-12y = -9 + 18 + 3 = 12$$

$$y = \frac{12}{-12} = -1$$

முனை $= (h, k) = (3, -1)$

$$(x-3)^2 = 12(y+1)$$

	x, y ஐப் பொறுத்து
அச்சு	$x - 3 = 0$
முனை	$V(3, -1)$
குவியம்	$F(0+3, 3-1)$ $= F(3,2)$
இயக்குவரையின் சமன்பாடு	$y + 1 = -3$ $y + 4 = 0$
செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு	$y + 1 = 3$ $y - 2 = 0$
செவ்வகலத்தின் நீளம்	12



6. $x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் அச்சு, முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப்படத்தை வரைக.

தீர்வு:

$$x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$$

$$x^2 - 2x = -8y - 17$$

$$x^2 - 2x + \mathbf{1} = -8y - 17 + \mathbf{1}$$

$$x^2 - 2x + 1 = -8y - 16$$

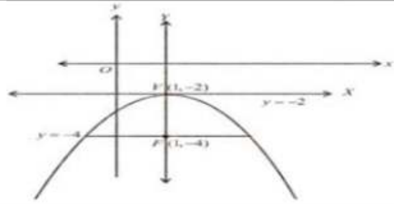
$$(x-1)^2 = -8(y+2)$$

$$\boldsymbol{X^2 = -8Y}$$

இங்கு $X = x - 1; Y = y + 2$

$$\boldsymbol{4a = 8 \Rightarrow a = 2}$$

	X, Y ஐப் பொறுத்து	x, y ஐப் பொறுத்து
அச்சு	$X = 0$	$x - 1 = 0$
முனை	$V(0,0)$	$V(1, -2)$
குவியம்	$F(0, -a)$ $= F(0, -2)$	$F(0+1, -2 - 2)$ $= F(1, -4)$
இயக்குவரையின் சமன்பாடு	$Y = 2$ $Y = 2$	$y + 2 = 2$ $y = 0$
செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு	$Y = -a$ $Y = -2$	$y + 2 = -2$ $y + 4 = 0$
செவ்வகலத்தின் நீளம்	$4a = 8$	8



7. $y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் அச்சு, முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப் படத்தை வரைக.

தீர்வு:

$$y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$$

$$y^2 + 6y = 8x - 9$$

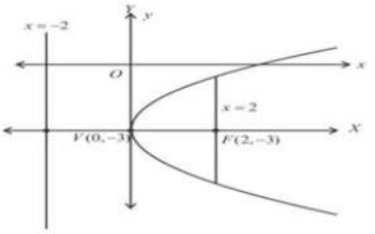
$$y^2 + 6y + 9 = 8x - 9 + 9$$

$$(y+3)^2 = 8x$$

$\boldsymbol{Y^2 = 8X}$ இங்கு $Y = y + 3; X = x$

$$\boldsymbol{4a = 8 \Rightarrow a = 2}$$

	X, Y ஐப் பொறுத்து	x, y ஐப் பொறுத்து
அச்சு	$Y = 0$	$y + 3 = 0$
முனை	$V(0,0)$	$V(0, -3)$
குவியம்	$F(a, 0) = F(2,0)$	$F(2+0, 0-3)$ $= F(2, -3)$
இயக்குவரையின் சமன்பாடு	$X = -a$ $X = -2$	$x = -2$
செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு	$X = a$ $X = 2$	$x = 2$
செவ்வகலத்தின் நீளம்	$4a = 8$	8



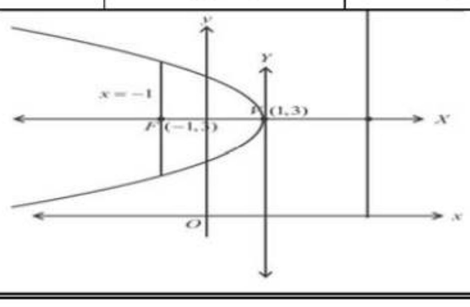
செய்து பார்க்க:
$y^2-8x-2y+17=0$ என்ற பரவளையத்தின் அச்சு, முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப் படத்தை வரைக.

8. $y^2+8x-6y+1=0$ என்ற பரவளையத்தின் அச்சு, முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அதன் வரைப்படத்தை வரைக.

தீர்வு:

$$y^2+8x-6y+1=0$$
$$y^2-6y=-8x-1$$
$$y^2-6y+\mathbf{9}=-8x-1+\mathbf{9}$$
$$y^2-6y+9=-8x+8$$
$$(y-3)^2=-8(x-1)$$
$$\boldsymbol{Y^2=-8X} \text{ இங்கு } Y=y-3;X=x-1$$
$$\boldsymbol{4a=8\Rightarrow a=2}$$

	X,Y ஐப் பொறுத்து	x,y ஐப் பொறுத்து
அச்சு	$Y=0$	$y-3=0$
முனை	$V(0,0)$	$V(1,3)$
குவியம்	$F(-a,0)=F(-2,0)$	$F(-2+1,0+3)$ $=F(-1,3)$
இயக்குவரையின் சமன்பாடு	$X=a$ $X=2$	$x-1=2$ $x-3=0$
செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு	$X=-a$ $X=-2$	$x-1=-2$ $x+1=0$
செவ்வகலத்தின் நீளம்	$4a=8$	8



✪9. $5x+12y=9$ என்ற நேர்க்கோடு அதிபரவளையம் $x^2-9y^2=9$ -ஐத் தொடுகிறது என நிரூபிக்க. மேலும் தொடும் புள்ளியையும் காண்க.

தீர்வு:

நேர்க்கோடு $\quad 5x+12y=9$

$$12y=-5x+9\Rightarrow y=-\frac{5}{12}x+\frac{9}{12}$$

$$\boxed{m=-\frac{5}{12},c=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}}$$

அதிபரவளையம் $\quad x^2-9y^2=9$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1\Rightarrow\boxed{a^2=9,b^2=1}$$

தொட கட்டுப்பாடு

$$c^2=a^2m^2-b^2$$
$$c^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$
$$a^2m^2-b^2=9\left(-\frac{5}{12}\right)^2-1=9\left(\frac{25}{144}\right)-1$$
$$=\frac{225}{144}-1=\frac{225-144}{144}=\frac{81}{144}=\frac{9}{16}$$
$$\therefore\ c^2=a^2m^2-b^2$$

$\therefore 5x+12y=9$ என்ற நேர்க்கோடு அதிபரவளையம் $x^2-9y^2=9$ -ஐத் தொடுகிறது.

தொடும் புள்ளி : $\left(\boldsymbol{\frac{-a^2m}{c},\frac{-b^2}{c}}\right)$

$$=\left(-9\times\left(-\frac{5}{12}\right)\times\frac{4}{3},-1\times\frac{4}{3}\right)=\left(5,-\frac{4}{3}\right)$$

✪10. $x-y+4=0$ என்ற நேர்க்கோடு நீள்வட்டம் $x^2+3y^2=12$ -ஐத் தொடுகிறது என நிரூபிக்க. மேலும் தொடும் புள்ளியையும் காண்க.

தீர்வு:

நேர்க்கோடு $\quad x-y+4=0\Rightarrow -y=-x-4\Rightarrow y=x+4$

$$\boxed{m=1,c=4}$$

நீள்வட்டம் $\quad x^2+3y^2=12$

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow\boxed{a^2=12,b^2=4}$$

தொட கட்டுப்பாடு

$$c^2=a^2m^2+b^2$$
$$c^2=4^2=16$$
$$a^2m^2+b^2=12(1)^2+4=12+4=16$$
$$\therefore\ c^2=a^2m^2+b^2$$

$x-y+4=0$ என்ற நேர்க்கோடு நீள்வட்டம் $x^2+3y^2=12$ -ஐத் தொடுகிறது.

தொடும் புள்ளி : $\left(\boldsymbol{\frac{-a^2m}{c},\frac{b^2}{c}}\right)$

$$=\left(-12\times(1)\times\frac{1}{4},4\times\frac{1}{4}=1\right)=(-3,1)$$

✪11. $x+2y-5=0$ -ஐ ஒரு தொலைத் தொடுகோடாகவும் $(6,0)$ மற்றும் $(-3,0)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லக்கூடியதுமான செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு: செவ்வக அதிபரவளையத்தின் ஒரு தொலைத் தொடுகோடு $x+2y-5=0$

எனவே, மற்றொரு தொலைத் தொடுகோட்டின் வடிவம்

$$2x - y + k = 0$$

தொலைத் தொடு கோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாட்டின் வடிவம் $(x + 2y - 5)(2x - y + k) = 0$

எனவே, அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டின் வடிவம்

$$(x + 2y - 5)(2x - y + k) + c = 0$$

அதிபரவளையம் $(6,0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதால்,

$$(6 - 0 - 5)(12 - 0 + k) + c = 0$$
$$(1)(12 + k) + c = 0$$
$$12 + k + c = 0$$
$$k + c = -12 \qquad (1)$$

அதிபரவளையம் $(-3,0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதால்,

$$(-3 - 0 - 5)(-6 - 0 + k) + c = 0$$
$$(-8)(-6 + k) + c = 0$$
$$48 - 8k + c = 0$$
$$-8k + c = -48 \qquad (2)$$

$(1) - (2) \qquad \Rightarrow k + c + 8k - c = -12 + 48$

$$\Rightarrow 9k = 36 \Rightarrow \boldsymbol{k = 4}$$

$k = 4$ என (1) இல் பிரதியிட, $4 + c = -12 \Rightarrow \boldsymbol{c = -16}$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$\boxed{\boldsymbol{(x + 2y - 5)(2x - y + 4) - 16 = 0}}$$

✪12. அதிபரவளையத்தின் மையம் $(2, 4)$. மேலும் $(2, 0)$ வழியே செல்கிறது. இதன் தொலைத் தொடு கோடுகள் $\boldsymbol{x + 2y - 12 = 0}$ மற்றும் $\boldsymbol{x - 2y + 8 = 0}$ ஆகியவற்றிற்கு இணையாக இருக்கின்றன எனில் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு: தொலைத் தொடுகோடுகளின் இணை கோடுகள்

$$x + 2y - 12 = 0 \text{ மற்றும் } x - 2y + 8 = 0$$

∴ தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளின் வடிவம்

$$x + 2y + l = 0 \text{ மற்றும் } x - 2y + m = 0$$

இது அதிபரவளையத்தின் மையம் $(2,4)$ வழியாகச் செல்கிறது. எனவே

$$2 + 8 + l = 0 \Rightarrow 10 + l = 0 \Rightarrow \boldsymbol{l = -10}$$
$$2 - 8 + m = 0 \Rightarrow -6 + m = 0 \Rightarrow \boldsymbol{m = 6}$$

∴ தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$x + 2y - 10 = 0 \text{ மற்றும் } x - 2y + 6 = 0$$

தொலைத் தொடு கோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு

$$(x + 2y - 10)(x - 2y + 6) = 0$$

எனவே, அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டின் வடிவம்

$$(x + 2y - 10)(x - 2y + 6) + k = 0$$

அதிபரவளையம் $(2,0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதால்,

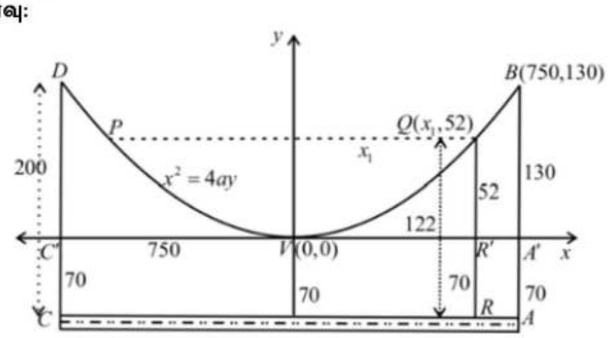
$$(2 + 0 - 10)((2 - 0 + 6) + k = 0$$
$$\Rightarrow (-8)((8) + k = 0 \Rightarrow -64 + k = 0 \Rightarrow \boldsymbol{k = 64}$$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$\boxed{\boldsymbol{(x + 2y - 10)(x - 2y + 6) + 64 = 0}}$$

✪13. ஒரு தொங்கு பாலத்தின் கம்பி வடம் பரவளைய வடிவிலுள்ளது. அதன் பாரம் கிடைமட்டமாக சீராக பரவியுள்ளது. அதைத் தாங்கும் இரு தூண்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் 1500 அடி. கம்பி வடத்தை தாங்கும் புள்ளிகள் தூணில் தரையிலிருந்து 200 அடி உயரத்தில் அமைந்துள்ளன. மேலும் தரையிலிருந்து கம்பி வடத்தின் தாழ்வான புள்ளியின் உயரம் 70 அடி, கம்பிவடம் 122 அடி உயரத்தில் தாங்கும் கம்பத்திற்கு இடையே உள்ள செங்குத்து நீளம் காண்க.(தரைக்கு இணையாக)

தீர்வு:



கம்பி வடத்தின் சமன்பாடு $x^2 = 4ay$.

கொடுக்கப்பட்ட விரங்களிலிருந்து வடத்தின் முனை வழிப்பாதையிலிருந்து 70 அடி மேல் அமைந்துள்ளது.

$AC = 1500$ அடி.

புள்ளி $B(750,130)$ பரவளையத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.

$$(750)^2 = 4a(130) \Rightarrow 4a = \frac{750 \times 750}{130} = \frac{75 \times 750}{13}$$

கம்பி வடத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 = \frac{75 \times 750}{13} y$$

$Q(x_1, 52)$ என்ற புள்ளி பரவளையத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.

$$\therefore x_1^2 = \frac{75 \times 750}{13} \times 52 = 75 \times 750 \times 4$$
$$x_1^2 = 75 \times 75 \times 10 \times 4 \Rightarrow x_1 = 75 \times 2\sqrt{10} = 150\sqrt{10}$$
$$PQ = 2x_1 = 300\sqrt{10} \text{ அடி}$$

✪14. ஒரு தொங்கு பாலத்தின் கம்பி வடம் பரவளைய வடிவிலுள்ளது. அதன் நீளம் 40மீட்டர் ஆகும். வழிப்பாதையானது கம்பி வடத்தின் கீழ்மட்டப் புள்ளியிலிருந்து 5 மீட்டர் கீழே உள்ளது. கம்பி வடத்தை தாங்கும் தூண்களின் உயரங்கள் 55 மீட்டர் எனில் 30 மீட்டர் உயரத்தில் கம்பி வடத்திற்கு ஒரு துணை தாங்கி கூடுதலாகக் கொடுக்கப்பட்டால் அத்துணைத் தாங்கியின் நீளத்தைக் காண்க.

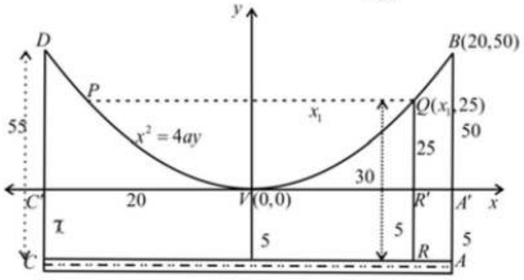
தீர்வு:

கம்பி வடத்தின் சமன்பாடு $x^2 = 4ay$.

கொடுக்கப்பட்ட விரங்களிலிருந்து வடத்தின் முனை வழிப்பாதையிலிருந்து 5 மீட்டர் மேல் அமைந்துள்ளது. $AC = 40$ மீட்டர்.

புள்ளி $A(20,50)$ பரவளையத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.

$$(20)^2 = 4a(50) \Rightarrow 4a = \frac{20 \times 20}{50} = 8$$



கம்பி வடத்தின் சமன்பாடு $x^2 = 8y$.

$Q(x_1, 25)$ என்ற புள்ளி பரவளையத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.

$$\therefore x_1^2 = 8 \times 25 = 2 \times 4 \times 25$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2} \times 2 \times 5 = 10\sqrt{2}$$

$$PQ = 2x_1 = 20\sqrt{2} \text{ மீட்டர்.}$$

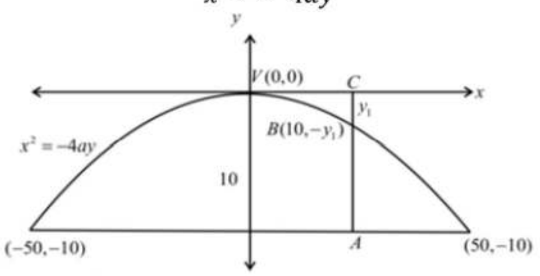
✪15.ஒரு ரயில்வே பாலத்தின் மேல் வளைவு பரவளையத்தின் அமைப்பைக் கொண்டுள்ளது. அந்த வளைவின் அகலம் 100 அடியாகவும் அவ்வளைவின் உச்சிப்புள்ளியின் உயரம் பாலத்திலிருந்து 10 அடியாக வும் உள்ளது எனில், பாலத்தின் மத்தியிலி ருந்து இடப்புறம் அல்லது வலப்புறம் 10 அடி தூரத்தில் பாலத்தின் மேல் வளைவு எவ்வளவு உயரத்தில் இருக்கும்?9

தீர்வு:

இங்கு பரவளையம் கீழ்நோக்கித் திற்புடையதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

எனவே, ரயில்வே பாலத்தின் மேல் வளைவின் சமன்பாடு

$$x^2 = -4ay$$



இது $(50, -10)$ வழியாகச் செல்கிறது.

$$\therefore 50 \times 50 = -4a(-10) \Rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{250}}{\mathbf{4}}$$

$$\therefore x^2 = -4\left(\frac{250}{4}\right)y \Rightarrow \boldsymbol{x^2 = -250y}$$

பரவளையத்தின் மேல் உள்ள புள்ளி $B(10, y_1)$ என்க.

$$\therefore 100 = -250y_1 \Rightarrow y_1 = -\frac{100}{250} = -\frac{2}{5}$$

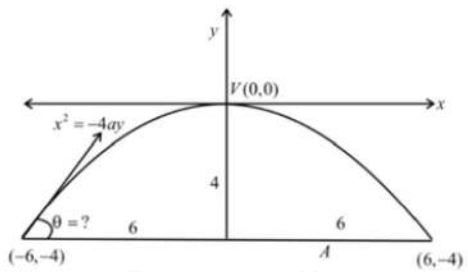
$$AC = 10 \text{ மற்றும் } BC = \frac{2}{5}$$

$$AB = 10 - \frac{2}{5} = \frac{50-2}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5} \text{ அடி}$$

அதாவது, தேவைப்பட்ட இடத்தில் பாலத்தின் உயரம் $9\frac{3}{5}$ அடி ஆகும்.

✪16.ஒரு ராக்கெட் வெடியானது கொளுத்தும் போது அது ஒரு பரவளையப் பாதையில் செல்கிறது. அதன் உச்ச உயரம் 4 மீட்டர் ஐ எட்டும்போது அது கொளுத்தப்பட்ட இடத்திலிருந்து கிடைமட்ட தூரம் 6 மீட்டர் தொலைவிலுள்ளது. இறுதியாக கிடைமட்டமாக 12மீ தொலைவில் தரையை வந்தடைகிறது எனில் புறப்பட்ட இடத்தில் தரையுடன் ஏற்படுத்தும் எறிகோணம் காண்க.

தீர்வு:



ஒரு ராக்கெட் வெடியானது செல்லும் பரவளையப் பாதையின் சமன்பாடு $x^2 = -4ay$ ஆகும். இது $(6, -4)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore 6^2 = -4a(-4)$$

$$36 = 16a \Rightarrow a = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

பரவளையப் பாதையின் சமன்பாடு

$$x^2 = -4\left(\frac{9}{4}\right)y \Rightarrow x^2 = -9y$$

x- ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$2x = -9\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{-9} = -\frac{2}{9}x$$

$(-6, -4)$ இல்

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{9} \times -6 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

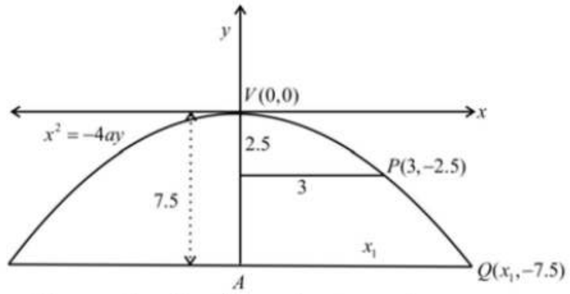
அதாவது,

$$\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

✪17.தரைமட்டத்திலிருந்து 7.5மீ உயரத்தில் தரைக்கு இணையாக பொருத்தப்பட்ட ஒரு குழாயிலிருந்து வெளியேறும் நீர் தரையைத் தொடும் பாதை ஒரு பரவளையத்தை ஏற்படுத்துகிறது. மேலும் இந்த பரவளையப் பாதையின் முனை குழாயின் வாயில் அமைகிறது. குழாய் மட்டத்திற்கு 2.5மீ கீழே நீரின்

பாய்வானது குழாயின் முனை வழியாகச் செல்லும் நிலை குத்துக்கோட்டிற்கு 3 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ளது எனில் குத்துக் கோட்டிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திற்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழும்.

தீர்வு: கணக்கின்படி, குழாயிலிருந்து வெளியேறும் நீர் பாதை கீழ்நோக்கி திறப்புடைய பரவளையம் ஆகும்.



பாதையின் சமன்பாடு $x^2 = -4ay$ ஆகும்.

P என்ற புள்ளி பரவளையப் பாதையில் குழாய் மட்டத்திற்கு 2.5 மீ கீழேயும், குழாயின் முனை வழியாகச் செல்லும் குத்துக்கோட்டிற்கு 3 மீட்டர் அப்பாலும் உள்ளது என்பதால்

P என்பது $(3, -2\cdot 5)$ ஆகும்.

$x^2 = -4ay$ என்பது $(3, -2.5)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore 3^2 = -4a(-2.5) \Rightarrow 9 = 10a \Rightarrow a = \frac{9}{10}$$

பரவளையப் பாதையின் சமன்பாடு

$$x^2 = -4\left(\frac{9}{10}\right)y$$

குத்துக் கோட்டிலிருந்து x_1 மீட்டர் தூரத்திற்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழும் என்க. குழாயானது தரைமட்டத்திலிருந்து 7.5மீ உயரத்தில் அமைந்துள்ளதால், $(x_1, -7\cdot 5)$ என்ற புள்ளியும் பரவளையப் பாதையில் அமைந்து இருக்கும். எனவே

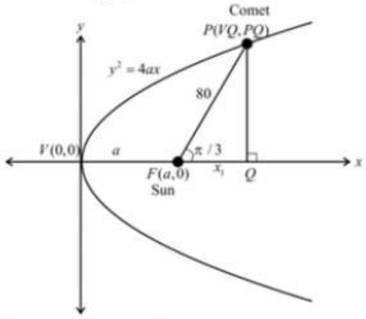
$$x_1^2 = -4 \times \frac{9}{10} \times -7\cdot 5 = 30 \times \frac{9}{10} = 9 \times 3$$

$$x_1 = 3\sqrt{3}$$

எனவே குத்துக் கோட்டிலிருந்து $3\sqrt{3}$ மீட்டர் தூரத்திற்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழும்.

✪18. ஒரு வால் விண்மீன் ஆனது சூரியனைச் சுற்றி பரவளையப் பாதையில் செல்கிறது மற்றும் சூரியன் பரவளையத்தின் குவியத்தில் அமைகிறது. வால் விண்மீன் சூரியனிலிருந்து 80 மில்லியன் கி.மீ. தொலைவில் அமைந்து இருக்கும் போது வால் விண்மீனையும் சூரியனையும் இணைக்கும் கோடு அச்சுடன் $\frac{\pi}{3}$ கோணத்தினை ஏற்படுத்துமானால் (i) வால் விண்மீனின் பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (ii) வால் விண்மீன் சூரியனுக்கு எவ்வளவு அருகில் வரமுடியும் என்பதையும் காண்க.(பாதை வலதுபுறம் திறப்புடையதாக கொள்க)

தீர்வு: வால் விண்மீனின் பாதை $y^2 = 4ax$ என்க. வால் விண்மீனின் நிலை P என்க. குவியம் F எனில் $FP = 80$ மில்லியன் கி.மீ. ஆகும்.



$PQ \perp x -$ அச்சு வரைக. $FQ = x_1$ என்க.

$\Delta\, FQP$ இலிருந்து

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{PQ}{FP} \Rightarrow PQ = FP \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{FQ}{FP} \Rightarrow FQ = FP \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 80 \times \frac{1}{2} = 40$$

$$\therefore VQ = VF + FQ = a + 40.$$

P என்பது $(VQ, PQ) = (a + 40, 40\sqrt{3})$.

P என்பது பரவளையதின் மீதுள்ளதால்,

$$\left(40\sqrt{3}\right)^2 = 4a(a + 40)$$

$$1600 \times 3 = 4a^2 + 160a$$

$$4a^2 + 160a - 4800 = 0 \Rightarrow a^2 + 40a - 1200 = 0$$

$(a + 60)(a - 20) = 0 \Rightarrow a = -60$ அல்லது $a = 20$

$a = -60$ ஏற்புடையதல்ல.

வால் விண்மீனின் பாதையின் சமன்பாடு

$$y^2 = 4 \times 20 \times x \Rightarrow y^2 = 80x$$

சூரியனுக்கும் வால் விண்மீனுக்கும் இடையேயுள்ள மிகக் குறைந்த தூரம் $VF = a = 20$ **மில்லியன் கி.மீ.**

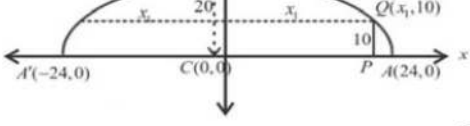
✪19. ஒரு வளைவு அரை-நீள்வட்ட வடிவில் உள்ளது. அதன் அகலம் 48 அடி, உயரம் 20 அடி. தரையிலிருந்து 10 அடி உயரத்தில் வளைவின் அகலம் என்ன?

தீர்வு: $2a = 48 \Rightarrow a = 24; b = 20$

நீள்வட்டதின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{24^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$$

மையத்திலிருந்து தரையிலிருந்து 10 அடி உயரத்தில் வளைவின் அகலம் x_1 என்க. எனவே $(x_1, 10)$ என்ற புள்ளி நீள்வட்டதின் மீதுள்ளது.



$$\therefore \frac{x_1^2}{24^2}+\frac{10^2}{20^2}=1$$
$$\frac{x_1^2}{24^2}=1-\frac{100}{400}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\therefore x_1^2=24^2\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$x_1=24\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$$

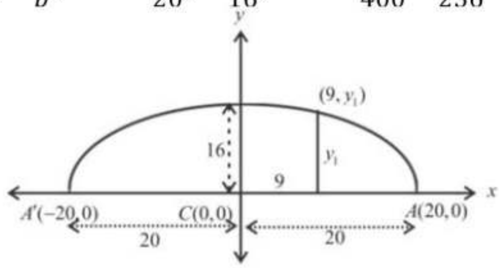
மையத்திலிருந்து தரையிலிருந்து 10 அடி உயரத்தில் வளைவின் அகலம் $2x_1=2\times12\sqrt{3}=24\sqrt{3}$ அடி.

✪20.ஒரு பாலத்தின் வளைவானது அரை-நீள்வட்ட வடிவில் உள்ளது. கிடைமட்டத்தில் அதன் அகலம் 40 அடியாகவும், மையத்திலிருந்து அதன் உயரம் 16 அடியாகவும் உள்ளது எனில் மையத்திலிருந்து வலது அல்லது இடப் புறத்தில் 9 அடி தூரத்தில் உள்ள தரைப்புள்ளியிலிருந்து பாலத்தின் உயரம் என்ன?

தீர்வு: $2a=40\Rightarrow a=20\,;\,b=16$

நீள்வட்டதின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{20^2}+\frac{y^2}{16^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{256}=1$$



மையத்திலிருந்து வலப்புறத்தில் 9 அடி தூரத்தில் உள்ள தரைப்புள்ளியிலிருந்து பாலத்தின் உயரம் y_1 என்க.

எனவே $(9,y_1)$ என்ற புள்ளி நீள்வட்டதின் மீதுள்ளது.

$$\therefore \frac{9^2}{400}+\frac{y_1^2}{256}=1$$
$$\frac{y_1^2}{256}=1-\frac{9^2}{400}=1-\frac{81}{400}=\frac{400-81}{400}=\frac{319}{400}$$
$$\therefore y_1^2=256\left(\frac{319}{400}\right)$$
$$y_1=\frac{16}{20}\sqrt{319}=\frac{4}{5}\sqrt{319}$$

மையத்திலிருந்து வலது அல்லது இடப் புறத்தில் 9 அடி தூரத்தில் உள்ள தரைப்புள்ளியிலிருந்து பாலத்தின் உயரம் $\frac{4}{5}\sqrt{319}$ அடி.

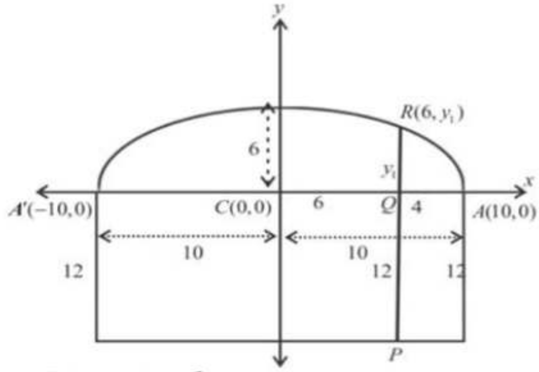
✪21.ஒரு நுழைவு வாயிலின் மேற்கூரையானது அரை-நீள்வட்ட வடிவில் உள்ளது. இதன் அகலம் 20 அடி. மையத்திலிருந்து அதன் உயரம் 18 அடி மற்றும் பக்கச் சுவரிகளின் உயரம் 12 அடி எனில் ஏதேனும் ஒரு பக்கச் சுவரிலிருந்து 4 அடி தூரத்தில் மேற்கூரையின் உயரம் என்னவாக இருக்கும்?

தீர்வு: பக்கச் சுவரிலிருந்து 4 அடி தூரத்தில் மேற்கூரையின் உயரம் PQR என்க. படத்தின் மூலம் $PQ=12$ அடி.

படத்தின் மூலம் , முனைகள் $A(10,0)$ மற்றும் $A'(-10,0)$.

படத்தின் மூலம் , $AA'=2a=20\Rightarrow a=10$

$$b=18-12=6$$



நீள்வட்டதின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$$

பக்கச் சுவரிலிருந்து 4 அடி தூரத்தில் மேற்கூரையின் உயரம் $12+y_1$ என்க. எனவே $R(6,y_1)$ என்ற புள்ளி நீள்வட்டதின் மீதுள்ளது.

$$\therefore \frac{6^2}{100}+\frac{y_1^2}{36}=1$$
$$\Rightarrow\frac{y_1^2}{36}=1-\frac{36}{100}=\frac{100-36}{100}=\frac{64}{100}$$
$$\therefore y_1^2=36\left(\frac{64}{100}\right)$$
$$y_1=6\times\frac{8}{10}=\frac{48}{10}=4\cdot8$$

பக்கச் சுவரிலிருந்து 4 அடி தூரத்தில் மேற்கூரையின் உயரம் $12+y_1=12+4\cdot8=16\cdot8$ அடி.

✪22.ஒரு நீள்வட்டப் பாதையின் குவியத்தில் பூமி இருக்குமாறு ஒரு துணைக்கோள் சுற்றி வருகிறது. இதன் மையத் தொலைவு தகவு $\frac{1}{2}$ ஆகவும் பூமிக்கும் துணைக் கோளுக்கும் இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் 400 கிலோ மீட்டர்கள் ஆகவும் இருக்குமானால் துணைக் கோளுக்கும் பூமிக்கும் இடைப்பட்ட அதிகபட்ச தூரம் என்ன?

தீர்வு:

படத்தில் பூமியின் நிலை F_1 என்க.

பூமிக்கும் துணைக் கோளுக்கும் இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் $F_1A=400$ கிலோ மீட்டர்கள்.

துணைக் கோளுக்கும் பூமிக்கும் இடைப்பட்ட அதிகபட்ச தூரம் F_1A'.

$$CA'=CA=a,CF_1=ae,F_1A=400$$
$$CA=CF_1+F_1A\Rightarrow a=ae+400$$
$$a=a\left(\frac{1}{2}\right)+400\Rightarrow a-\frac{a}{2}=400$$